Exercice de recherche opérationnelle
Localisation de dépôts

Marc Roelens

Corrigé

1 Le problème

On se propose de déterminer l'emplacement de dépôts chargés d'approvisionner des points de vente : un point de vente n'est approvisionné que par un seul dépôt, un dépôt peut approvisionner plusieurs points de vente.

Une étude a préalablement déterminé les différentes localisations possibles pour ces dépôts : la question est maintenant de déterminer lesquels seront effectivement ouverts. On fait les deux hypothèses simplificatrices suivantes :

- il n'y a pas de limitation sur la capacité de stockage d'un dépôt, qui peut donc à l'extrême limite approvisionner tous les points de vente ;
- il n'y a pas de limitation sur la capacité de transport entre un dépôt et tous les points de vente qu'il dessert.

On suppose par ailleurs que les coûts à prendre en compte sont de deux natures :

- le coût mensuel fixe de fonctionnement d'un dépôt, qui ne dépend donc pas du nombre de points de vente desservis (à partir du moment où il y en a au moins un et que le dépôt est donc ouvert) ; on note f_j le coût mensuel fixe de fonctionnement du dépôt j ;
- le coût mensuel d'approvisionnement d'un point de vente, qui dépend de ce point de vente et du dépôt qui l'approvisionne ; on note a_{ij} le coût mensuel d'approvisionnement pour le point de vente i à partir du dépôt j.

On cherche bien évidemment à trouver l'approvisionnement qui minimise le coût global mensuel de fonctionnement.

1.1 Un exemple

La table 1 donne les coûts pour un exemple de 5 dépôts possibles permettant d'approvisionner 12 points de vente.

On souhaite également pouvoir traiter des exemples de taille plus importante :

- 10 dépôts possibles pour 100 points de vente ;
- 25 dépôts possibles pour 300 points de vente ;
- 40 dépôts possibles pour 500 points de vente.

2 Premières réflexions

2.1 Un premier modèle

On note N le nombre de points de vente et P le nombre de dépôts. Pour $i \in \{1..N\}$, on note $\Delta(i)$ le numéro du dépôt qui approvisionne le point de vente i. On peut alors exprimer le coût global mensuel de fonctionnement $\mathcal{C}(\Delta)$ par :

$$\mathcal{C}(\Delta) = \sum_{j \in \Delta(\{1..N\})} f_j + \sum_{i=1}^{N} a_{i\Delta(i)}$$

Points de vente	Dépôts possibles				
	1	2	3	4	5
1	81	98	88	105	136
2	23	36	37	35	48
3	120	99	130	151	146
4	60	66	49	33	58
5	97	122	96	105	76
6	51	47	56	49	51
7	91	105	63	82	97
8	27	16	28	42	29
9	153	172	167	121	148
10	98	129	119	77	88
11	81	79	67	41	35
12	75	76	77	71	66
Coût fixe	63	39	42	44	40

TAB. 1 – Tableau des coûts : 5 dépôts, 12 points de vente

Résoudre le problème posé, c'est trouver la fonction Δ qui minimise ce coût. Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{D}$ de toutes les fonctions Δ de $\{1..N\}$ dans $\{1..P\}$ est de P^N, et une méthode de force brute a donc une complexité en $O(P^N)$. Pour chaque fonction, on doit évaluer le coût et comparer ce coût au minimum : le nombre d'opérations est donc de l'ordre de $N + P$. Au total, on a donc un nombre d'opérations de l'ordre de $(N + P)P^N$.

Dans le petit exemple ($N = 12, P = 5$), ceci donne un nombre d'opérations de l'ordre de 17×5^{12}, soit un peu plus de 4 milliards d'opérations ! Si le temps de calcul est abordable pour cet exemple élémentaire, il va devenir supérieur à plusieurs millénaires dès que la taille du problème va augmenter...

2.2 Un second modèle

En fait, comme on suppose qu'un dépôt peut alimenter tous les points de vente (pas de contrainte ni sur le stockage ni sur le transfert), et comme on cherche à minimiser le coût global, on a la propriété suivante : chaque point de vente est alimenté par le dépôt ouvert qui est le moins cher pour ce point de vente.

Ainsi, en notant x_j une variable valant 1 si le dépôt j est ouvert et 0 s'il est fermé, on obtient une nouvelle formulation pour le coût global :

$$\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_P) = \sum_{x_j=1} f_j + \sum_{i=1}^{N} \min_{x_j=1} a_{ij}$$

On retrouve ainsi une formulation sous forme de l'optimisation d'une fonction de P variables bivalentes : on pense alors naturellement à une méthode de recherche par séparation et évaluation progressive.

On peut également remarquer que sur ce modèle, une résolution par méthode de force brute demande un nombre d'opérations de l'ordre de $N \times P \times 2^P$, soit dans l'exemple choisi $5 \times 12 \times 2^5 = 1920$, ce qui est beaucoup plus envisageable en des temps raisonnables. Mais la méthode reste peu abordable pour les problèmes de taille plus importante : dans le cas des 25 dépôts pour 300 points de vente, on obtient une complexité de l'ordre de $25 \times 300 \times 2^{25} = 251658240000$ (plus de 250 milliards d'opérations).

3 Résolution par méthode SEP

On sait que la méthode SEP conduit à examiner des « solutions partielles » c'est-à-dire des sous-ensembles $\mathcal{S}(J_1, J_0)$ de solutions définies par :

– une partie J_1 de $\{1..P\}$ constituée des indices j tels que toute solution du sous-ensemble vérifie $x_j = 1$;

– une partie J_0 de $\{1..P\}$ constituée des indices j tels que toute solution du sous-ensemble vérifie $x_j = 0$;

avec la condition (triviale) $J_1 \cap J_0 = \varnothing$. Les indices qui n'appartiennent ni à J_1 ni à J_0 sont dits indéterminés. La recherche s'initialise avec l'ensemble de toutes les solutions possibles, donc où aucune variable n'est encore déterminée, soit $\mathcal{S}(\varnothing, \varnothing)$.

On sait que l'on peut envisager une méthode SEP lorsque l'on est capable, pour une solution partielle, de calculer une borne (inférieure dans le cas présent puisque l'on cherche un minimum).

3.1 Calcul d'une borne

Comme on cherche à minimiser le coût, on doit choisir une borne inférieure pour cette fonction. On rappelle la propriété essentielle d'une borne :

– pour toute solution σ de $\mathcal{S}$, on a

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) \leq \mathcal{C}(\sigma)$$

En utilisant la formulation de $\mathcal{C}$ comme somme de deux termes, on peut aisément déterminer une borne :

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}(J_1, J_0)) = \sum_{j \in J_1} f_j + \sum_{i=1}^{N} \min_{j \notin J_0} a_{ij}$$

Remarquons que le premier terme de cette somme est nul lorsque J_1 est vide : on peut toutefois retenir, dans ce cas, le minimum des f_j parmi les dépôts non fermés (on est sûr qu'une solution contient au moins un dépôt ouvert).

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}(\varnothing, J_0)) = \min_{j \notin J_0} f_j + \sum_{i=1}^{N} \min_{j \notin J_0} a_{ij}$$

3.2 Principe de séparation

Le principe de séparation peut se détailler comme suit :

– à chaque étape k de l'algorithme SEP, on considère la solution partielle ayant la borne la plus petite, que l'on note $\mathcal{S}_k(J_1, J_0)$;
– puis on choisit un indice j_k encore indéterminé, c'est-à-dire hors de $J_1 \cup J_0$; si on ne peut pas (c'est-à-dire si toutes les variables sont déterminées), c'est donc une solution complète, qui est forcément **la** solution optimale, et l'algorithme est donc terminé ;
– sinon, on « sépare » $\mathcal{S}_k(J_1, J_0)$ en deux nouvelles solutions $\mathcal{S}(J_1 \cup \{j_k\}, J_0)$ et $\mathcal{S}(J_1, J_0 \cup \{j_k\})$, dont on évalue les bornes.

Il reste à déterminer l'ordre de sélection des variables : parmi les variables hors de $J_1 \cup J_0$, laquelle choisir ? On peut retenir plusieurs critères :

– celle correspondant au dépôt de coût minimal ;
– celle correspondant au regret minimal ou maximal (voir ci-après) ;
– la première (au sens de l'ordre numérique) qui est encore indéterminée.

Il n'y a pas de méthode « évidente » par rapport aux autres.

4 Améliorations

4.1 Sélection et élimination a priori

Comme cela est parfois le cas avec la méthode SEP, cet exemple permet de mettre en place une phase de sélection et élimination a priori, c'est-à-dire déterminer des éléments faisant obligatoirement partie de l'ensemble J_1 (et donc des dépôts qui sont nécessairement ouverts pour la solution optimale) ou de l'ensemble J_0 (et donc des dépôts qui sont nécessairement fermés pour la solution optimale).

4.1.1 Notion de regret

On appelle couramment en recherche opérationnelle *regret* l'incidence sur la fonction économique d'une décision modifiant une solution envisagée. Dans notre cas, supposons que pour une solution partielle particulière, le dépôt j soit ouvert, et envisageons sa fermeture.

Alors, dans la solution initiale, certains points de vente étaient approvisionnés par ce dépôt : ce sont ceux pour lesquels ce dépôt est de coût minimal parmi ceux ouverts. Donc, si on le ferme, ces points de vente vont devoir s'approvisionner à partir d'un autre dépôt, ce qui va entraîner un surcoût : on appelle alors $regret$ la somme de ces surcoûts.

Comme on est dans le cas d'une solution partielle, on ne connaît pas exactement les dépôts ouverts ou fermés (il reste des dépôts indéterminés), et on ne peut pas calculer la valeur exacte de ce regret : cependant, on peut déterminer un minorant et un majorant de ce regret.

4.1.2 Minorant du regret

On peut calculer ce minorant de la façon suivante :

- parmi tous les points de vente, quelle que soit la solution partielle envisagée, si le dépôt j est ouvert, on est sûr que les points de vente pour lesquels j est le dépôt de coût minimal parmi ceux non fermés sont approvisionnés par j ;
- pour chacun de ces points de vente, le surcoût minimal engendré par la fermeture du dépôt j est la différence entre le minimum des coûts d'approvisionnement du point de vente et le coût classé en second (minimum toujours calculé parmi les dépôts non fermés) ;
- le minorant est alors la somme des surcoûts précédents.

En résumé, ce minorant se calcule par :

$$R_m(\mathcal{S}(J_1, J_0), j) = \sum_{i=1}^{N} \left(\min_{k \notin J_0 \cup \{j\}} a_{ik} - \min_{k \notin J_0} a_{ik} \right)$$

Dans le cas où J_0 est vide, on a une expression simplifiée :

$$R_m(\mathcal{S}(J_1, \varnothing), j) = \sum_{i=1}^{N} \left(\min_{k \neq j} a_{ik} - \min_{k} a_{ik} \right)$$

4.1.3 Majorant du regret

On peut calculer ce majorant de la façon suivante :

- parmi tous les points de vente, quelle que soit la solution partielle envisagée, si le dépôt j est ouvert, on est sûr que les points de vente pour lesquels il existe un dépôt autre que j parmi ceux ouverts et qui est moins cher que j ne sont pas approvisionnés par j ; en d'autres termes, ne sont susceptibles d'être approvisionnés par j que les points de vente pour lesquels j est moins cher que tous ceux ouverts ;
- pour chacun de ces points de vente, le surcoût maximal engendré par la fermeture du dépôt j est la différence entre le minimum des coûts d'approvisionnement du point de vente parmi les dépôts ouverts et le coût d'approvisionnement à partir de j ;
- le majorant est alors la somme des surcoûts précédents.

En résumé, ce majorant se calcule par :

$$R_M(\mathcal{S}(J_1, J_0), j) = \sum_{i=1}^{N} \left(\min_{k \in J_1} a_{ik} - \min_{k \in J_1 \cup \{j\}} a_{ik} \right)$$

Ceci n'a bien sûr de sens que si J_1 est non vide !

4.1.4 Le principe de sélection et élimination a priori

On peut maintenant détailler ce principe. Supposons que l'on examine le cas d'une solution partielle $\mathcal{S}(J_1, J_0)$ et considérons j hors de $J_1 \cup J_0$.

Alors, on peut calculer $R_m(\mathcal{S}(J_1, J_0), j)$. S'il se trouve que f_j est inférieur à ce minorant du regret, cela signifie que le coût de fonctionnement du dépôt j est inférieur au minorant donc au regret lui-même, c'est-à-dire encore le surcoût engendré par la fermeture du dépôt j : en d'autres termes, on est sûr d'y perdre plus que l'on y gagne ! On peut donc affirmer que ce dépôt j est forcément ouvert… ce que l'on appelle *sélection a priori du dépôt j*.

D'autre part, on peut aussi calculer $R_M(\mathcal{S}(J_1, J_0), j)$. S'il se trouve que f_j est supérieur à ce majorant du regret, cela signifie que le coût de fonctionnement du dépôt j est supérieur au majorant donc au regret lui-même, c'est-à-dire encore le surcoût engendré par la fermeture du dépôt j : en d'autres termes, on est sûr d'y perdre moins que l'on y gagne. On peut donc affirmer que ce dépôt j est forcément fermé… ce que l'on appelle *élimination a priori du dépôt j*.

En résumé :

$$\begin{cases} f_j \leq R_m(\mathcal{S}(J_1, J_0), j) & \Rightarrow \quad x_j = 1 \\ f_j \geq R_M(\mathcal{S}(J_1, J_0), j) & \Rightarrow \quad x_j = 0 \end{cases}$$

4.1.5 Répétition des phases de sélection et élimination

On peut remarquer que le principe de sélection (le calcul du minorant du regret) ne dépend que de J_0 et ne permet que de déterminer de nouveaux indices appartenant à J_1 : on peut donc traiter tous les indices encore indéterminés en une seule passe.

De même, le principe d'élimination (le calcul du majorant du regret) ne dépend que de J_1 et ne permet que de déterminer de nouveaux indices appartenant à J_0 : on peut, là encore, traiter tous les indices encore indéterminés en une seule passe.

On peut alors répéter en les alternant les phases de sélection et d'élimination : on s'arrête lorsque l'une des phases ne permet pas de déterminer une nouvelle variable.

Ces phases de sélection peuvent être effectuées a priori (avant toute phase de méthode SEP) mais également en cours de méthode SEP. Ainsi, après une phase de séparation, on génère une nouvelle solution partielle en sélectionnant une variable, donc en modifiant J_1 : on peut donc essayer une nouvelle phase d'élimination ; si celle-ci est fructueuse, on refait une phase de sélection… on stoppe lorsque l'une des phases est infructuesue. De même, après que l'on a généré la nouvelle solution partielle en éliminant la variable, donc en modifiant J_0, on peut essayer une phase de sélectino : si elle est fructueuse, on refait une phase d'élimination…

4.2 Tri des coûts a priori

Dans les formules ci-dessus permettant de calculer la borne, le minorant du regret, le majorant du regret, on voit que l'on a en permanence à calculer un minimum sur les a_{ij} pour un i donné et pour j vérifiant certaines propriétés : comme ces opérations vont être répétées de très nombreuses fois, on a tout intérêt à trier en traitement préalable ces coûts (toujours pour un i fixé), ce qui permet par la suite de calculer beaucoup plus rapidement ces minima.

Le coût de ce tri a priori est :

– proportionnel à $N \times P \log P$ en temps (réalisation de N tris de tableaux de taille P) ;

– proportionnel à $N \times P$ en espace (stockage des N tableaux contenant les P indices triés).

ce qui est tout à fait acceptable comparé aux coûts généraux de l'algorithme de recherche.

On peut démontrer que l'utilisation de ce tri a priori permet d'obtenir un calcul de borne, de minorant et de majorant du regret en temps proportionnel à N : ceci est à comparer à la complexité initiale proportionnelle à $N \times P$! La démonstration de ce résultat est laissée à titre d'exercice au lecteur….

5 Cas des 5 dépôts pour 12 points de vente

5.1 Première phase de sélection

On commence donc par une phase de sélection a priori en calculant le minorant du regret pour chacun des dépôts. On obtient les résultats suivants :

- dépôt 1 :
  le point de vente 1 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 7)
  le point de vente 2 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 12)
  $\longrightarrow$ surcoût total (au minimum) de 19
- dépôt 2 :
  le point de vente 3 se reporte (au minimum) sur le dépôt 1 (surcoût 21)
  le point de vente 6 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 2)
  le point de vente 8 se reporte (au minimum) sur le dépôt 1 (surcoût 11)
  $\longrightarrow$ surcoût total (au minimum) de 34
- dépôt 3 :
  le point de vente 7 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 19)
  $\longrightarrow$ surcoût total (au minimum) de 19
- dépôt 4 :
  le point de vente 4 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 16)
  le point de vente 9 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 27)
  le point de vente 10 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 11)
  $\longrightarrow$ surcoût total de (au minimum) 54
- dépôt 5 :
  le point de vente 5 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 20)
  le point de vente 11 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 6)
  le point de vente 12 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 5)
  $\longrightarrow$ surcoût total de (au minimum) 31

En comparant ces minorants aux coûts fixes de fonctionnement, on constate que le minorant pour le dépôt 4 (54) est supérieur au coût fixe pour ce dépôt (44) : on en déduit que le dépôt 4 est *forcément ouvert* et alimente les points de vente 4, 9 et 10.

5.2 Première phase d'élimination

Sachant maintenant que le dépôt 4 est ouvert, on peut calculer un majorant du regret. On obtient les résultats suivants :

- dépôt 1 :
  le point de vente 1 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 24)
  le point de vente 2 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 12)
  le point de vente 3 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 31)
  le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 8)
  le point de vente 8 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 15)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 qu'à partir du dépôt 1
  $\longrightarrow$ surcoût total (au maximum) de 90
- dépôt 2 :
  le point de vente 1 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 3 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 52)
  le point de vente 6 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 2)
  le point de vente 8 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 26)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 qu'à partir du dépôt 2
  $\longrightarrow$ surcoût total (au maximum) de 87

- dépôt 3 :
  le point de vente 1 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 17)
  le point de vente 3 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 21)
  le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 9)
  le point de vente 7 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 19)
  le point de vente 8 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 14)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 qu'à partir du dépôt 3
  $\longrightarrow$ surcoût total (au maximum) de 80
- dépôt 5 :
  le point de vente 3 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 5)
  le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 29)
  le point de vente 8 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 13)
  le point de vente 11 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 6)
  le point de vente 12 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 5)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 qu'à partir du dépôt 4
  $\longrightarrow$ surcoût total (au maximum) de 58

On constate que le majorant du regret est supérieur au coût fixe de fonctionnement pour le dépôt 1 (90 pour 63), le dépôt 2 (87 pour 39), le dépôt 3 (80 pour 42) et le dépôt 5 (58 pour 40) : on ne peut donc rien conclure, et il n'est pas utile de faire une nouvelle phase de sélection qui redonnerait les résultats déjà obtenus.

5.3 Méthode SEP

On peut maintenant lancer une méthode SEP classique pour les 4 dépôts encore indéterminés (1, 2, 3 et 5) : il reste à préciser le choix des variables de séparation.

En fait, comme nous avons implémenté la procédure de sélection et élimination a priori, nous allons l'utiliser ! L'idée est la suivante : si le regret minimal est inférieur au coût fixe mais assez proche, on peut penser que le dépôt correspondant a plus de chances d'être ouvert. De même, si le regret maximal est supérieur au coût fixe mais assez proche, on peut penser que le dépôt correspondant a plus de chances d'être fermé. On va donc calculer un critère qui est le ratio

$$\frac{|\text{regret} - \text{coût fixe}|}{\text{coût fixe}}$$

et nous choisirons comme variable de séparation celle qui réalise le minimum de ce ratio.

Bien sûr, une fois la phase de séparation effectuée, on peut retenter une phase d'élimination sur la nouvelle solution correspondant à l'ouverture du dépôt, et une nouvelle phase de sélection sur la nouvelle solution correspondant à la fermeture du dépôt. Ces phases peuvent d'ailleurs être répétées (en alternance) si elles sont fructueuses.

5.3.1 SEP : première étape

À partir de la solution initiale (précédemment calculée), dont le calcul de borne donne la valeur 781, on choisit comme première variable de séparation la variable x_1 (car $\frac{27}{63} < \frac{18}{40} < \frac{38}{42} < \frac{48}{39}$).

On « sépare » cette solution initiale (qui est celle de borne minimale) en deux nouvelles solutions :

- la première correspond à l'ouverture du dépôt 1 ; on sait alors que les points de vente 1 et 2 sont alimentés par ce dépôt ;
  on peut retenter une phase d'élimination, qui donne les résultats suivants :
  - dépôt 2 :
    le point de vente 3 se reporte (au maximum) sur le dépôt 1 (surcoût 21)
    le point de vente 6 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 2)
    le point de vente 8 se reporte (au maximum) sur le dépôt 1 (surcoût 11)
    les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir des dépôts 1 ou 4 qu'à partir

du dépôt 2
⟶ surcoût total (au maximum) de 34
- dépôt 3 :
  le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 1 (surcoût 1)
  le point de vente 7 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 19)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir des dépôts 1 ou 4 qu'à partir du dépôt 3
  ⟶ surcoût total (au maximum) de 20
- dépôt 5 :
  le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 1 (surcoût 21)
  le point de vente 11 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 6)
  le point de vente 12 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 5)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir des dépôts 1 ou 4 qu'à partir du dépôt 5
  ⟶ surcoût total (au maximum) de 32

on constate que le regret maximal est inférieur au coût fixe pour le dépôt 2 (34 pour 39), pour le dépôt 3 (20 pour 42) et pour le dépôt 5 (32 pour 40) : ces trois dépôts 2, 3 et 5 sont donc fermés !
On obtient alors la solution complète où seuls les dépôts 1 et 4 sont ouverts, de coût global 929.

- la seconde correspond à la fermeture du dépôt 1 ; on sait alors que le point de vente 2 est alimenté par le dépôt 4 (il est ouvert et c'est le moins cher de tous les dépôts non fermés pour ce point de vente) ; on peut retenter une phase de sélection, qui donne les résultats suivants :
  - dépôt 2 :
    le point de vente 3 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 31)
    le point de vente 6 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 2)
    le point de vente 8 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 12)
    ⟶ surcoût total (au minimum) de 45
  - dépôt 3 :
    le point de vente 1 se reporte (au minimum) sur le dépôt 2 (surcoût 10)
    le point de vente 7 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 19)
    ⟶ surcoût total (au minimum) de 29
  - dépôt 5 :
    le point de vente 5 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 20)
    le point de vente 11 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 6)
    le point de vente 12 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 5)
    ⟶ surcoût total (au minimum) de 31

  on en conclut que le regret minimal est supérieur au coût fixe pour le dépôt 2 (45 pour 39) : ce dépôt 2 est donc ouvert, il alimente les points de vente 3, 6 et 8.
  On peut refaire une phase d'élimination (on vient d'ouvrir un nouveau dépôt), et on obtient les résultats suivants :
  - dépôt 3 :
    le point de vente 1 se reporte (au maximum) sur le dépôt 2 (surcoût 10)
    le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 9)
    le point de vente 7 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 19)
    les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir des dépôts 2 ou 4 qu'à partir du dépôt 3
    ⟶ surcoût total (au maximum) de 38
  - dépôt 5 :
    le point de vente 5 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 29)
    le point de vente 11 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 6)
    le point de vente 12 se reporte (au maximum) sur le dépôt 4 (surcoût 5)
    les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir des dépôts 2 ou 4 qu'à partir du dépôt 5
    ⟶ surcoût total (au maximum) de 40

  on en conclut que le regret maximal est inférieur au coût fixe pour le dépôt 3 (38 pour 42) et pour le dépôt 5 (40 pour 40) : ces deux dépôts sont donc fermés ! On obtient alors une solution complète (dépôts 2 et 4 ouverts, dépôts 1, 3 et 5 fermés), de coût 908, donc inférieur à la meilleure solution connue : c'est notre nouvelle solution optimale.

La recherche est donc maintenant terminée :
- la solution optimale correspond à l'ouverture des dépôts 2 et 4 (et donc la fermeture des dépôts 1, 3 et 5) ;
- le dépôt 2 alimente les points de vente 1, 3, 6 et 8 ;
- le dépôt 4 alimente les points de vente 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11 et 12 ;
- le coût global est de 908.

5.3.2 SEP : en guise de conclusion

La recherche SEP avec procédure de sélection et élimination a priori, ainsi que le choix de la variable de séparation, conduit à une exploration très simple : une seule étape suffit pour aboutir aux 2 solutions complètes testées !

Ceci est à mettre en rapport avec les $2^5 = 32$ solutions testables dans la méthode de force brute. Plus le problème va augmenter en taille, et plus la méthode SEP va se montrer performante, et donc donner des résultats en un temps acceptable. Un exemple à 300 points de vente pour 25 dépôts nécessite environ une seconde et demie de temps de calcul (sur un ordinateur PowerMac G5 à 2.1 GHz), alors que la recherche exhaustive prend 3 minutes : la nature des données peut bien sûr grandement influencer ces temps de calcul (et notamment la performance des procédures de sélection et élimination).

6 Un problème à 8 dépôts et 20 points de vente

Le problème précédent en fait un « extrait » d'un problème à 8 dépôts et 20 points de vente. La table 2 indique les coûts (fixes et d'approvisionnement) pour ce problème.

	Dépôts possibles							
Points de vente	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	9	13	4	8	9	12	10
2	16	13	16	20	33	25	20	9
3	67	98	110	33	54	57	66	53
4	44	29	28	18	10	26	35	33
5	161	105	180	136	166	139	177	162
6	33	28	29	17	11	46	55	44
7	47	48	29	33	35	29	46	22
8	69	54	45	65	49	78	75	66
9	77	81	98	88	105	136	125	110
10	39	23	36	37	35	48	56	44
11	161	120	99	130	151	146	105	166
12	59	60	66	49	33	58	61	47
13	103	97	122	96	105	76	89	91
14	66	51	47	56	49	51	39	55
15	97	91	105	63	82	97	89	81
16	33	27	16	28	42	29	35	33
17	160	153	172	167	121	148	166	146
18	91	98	129	119	77	88	120	121
19	66	81	79	67	41	35	52	56
20	86	75	76	77	71	66	91	90
Coût fixe	65	63	39	42	44	40	41	70

TAB. 2 – Tableau des coûts : 8 dépôts, 20 points de vente

On peut bien sûr résoudre ce problème avec la même méthode, en effectuant des phases de sélection et élimination avant chaque phase de séparation.

6.1 Première phase de sélection

On commence donc par une phase de sélection a priori en calculant le minorant du regret pour chacun des dépôts. On obtient les résultats suivants :

- dépôt 1 :
  le point de vente 9 se reporte (au minimum) sur le dépôt 2 (surcoût 4)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 4
- dépôt 2 :
  le point de vente 5 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 31)
  le point de vente 10 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 12)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 43
- dépôt 3 :
  le point de vente 8 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 11 se reporte (au minimum) sur le dépôt 7 (surcoût 6)
  le point de vente 16 se reporte (au minimum) sur le dépôt 2 (surcoût 11)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 21
- dépôt 4 :
  le point de vente 1 se reporte (au minimum) sur le dépôt 1 (surcoût 3)
  le point de vente 3 se reporte (au minimum) sur le dépôt 8 (surcoût 20)
  le point de vente 15 se reporte (au minimum) sur le dépôt 8 (surcoût 18)
  ⟶ surcoût total de (au minimum) 41
- dépôt 5 :
  le point de vente 4 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 8)
  le point de vente 6 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 6)
  le point de vente 12 se reporte (au minimum) sur le dépôt 8 (surcoût 14)
  le point de vente 17 se reporte (au minimum) sur le dépôt 8 (surcoût 25)
  le point de vente 18 se reporte (au minimum) sur le dépôt 6 (surcoût 11)
  ⟶ surcoût total de (au minimum) 64
- dépôt 6 :
  le point de vente 13 se reporte (au minimum) sur le dépôt 7 (surcoût 13)
  le point de vente 19 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 6)
  le point de vente 20 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 5)
  ⟶ surcoût total de (au minimum) 24
- dépôt 7 :
  le point de vente 14 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 8)
  ⟶ surcoût total de (au minimum) 8
- dépôt 8 :
  le point de vente 2 se reporte (au minimum) sur le dépôt 2 (surcoût 4)
  le point de vente 7 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 7)
  ⟶ surcoût total de (au minimum) 11

En comparant ces minorants aux coûts fixes de fonctionnement, on constate que le minorant pour le dépôt 5 (64) est supérieur au coût fixe pour ce dépôt (44) : on en déduit que le dépôt 5 est *forcément ouvert* et alimente les points de vente 4, 6, 12, 17 et 18.

6.2 Première phase d'élimination

Sachant maintenant que le dépôt 5 est ouvert, on peut calculer un majorant du regret. On obtient les résultats suivants :

- dépôt 1 :
  le point de vente 1 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 1)
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 17)

le point de vente 5 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 5)
le point de vente 9 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 28)
le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 2)
le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 9)
les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 1
⟶ surcoût total (au pire) de 62

- dépôt 2 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 20)
  le point de vente 5 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 61)
  le point de vente 9 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 24)
  le point de vente 10 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 12)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 31)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 8)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 15)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 2
  ⟶ surcoût total (au pire) de 171
- dépôt 3 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 17)
  le point de vente 7 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 6)
  le point de vente 8 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 9 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 7)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 52)
  le point de vente 14 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 2)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 26)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 3
  ⟶ surcoût total (au pire) de 114
- dépôt 4 :
  le point de vente 1 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 13)
  le point de vente 3 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 21)
  le point de vente 5 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 30)
  le point de vente 7 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 2)
  le point de vente 9 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 17)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 21)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 9)
  le point de vente 15 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 19)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 14)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 4
  ⟶ surcoût total (au pire) de 150
- dépôt 6 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 8)
  le point de vente 5 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 27)
  le point de vente 7 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 6)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 5)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 29)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 13)
  le point de vente 19 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 6)
  le point de vente 20 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 5)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 6

⟶ surcoût total (au pire) de 99

- dépôt 7 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 13)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 46)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 16)
  le point de vente 14 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 10)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 7)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 7
  ⟶ surcoût total (au pire) de 92
- dépôt 8 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 24)
  le point de vente 3 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 1)
  le point de vente 5 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 7 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 13)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 14)
  le point de vente 15 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 1)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 9)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 8
  ⟶ surcoût total (au pire) de 66

On constate que le majorant du regret est inférieur au coût fixe de fonctionnement pour le dépôt 1 (62 pour 65) et pour le dépôt 8 (66 pour 70) : on en déduit donc que les dépôts 1 et 8 sont fermés.

6.3 Seconde phase de sélection

On recommence une nouvelle phase de sélection (car la procédure d'élimination a été fructueuse). On ne recalcule bien sûr les minorants des regrets que pour les dépôts encore indéterminés, c'est-à-dire les dépôts 2, 3, 4, 6 et 7. On obtient les résultats suivants :

- dépôt 2 :
  le point de vente 2 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 3)
  le point de vente 5 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 31)
  le point de vente 9 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 10 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 12)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 53
- dépôt 3 :
  le point de vente 7 se reporte (au minimum) sur le dépôt 6 (surcoût 0)
  le point de vente 8 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 11 se reporte (au minimum) sur le dépôt 7 (surcoût 6)
  le point de vente 16 se reporte (au minimum) sur le dépôt 2 (surcoût 11)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 21
- dépôt 4 :
  le point de vente 1 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 3 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 21)
  le point de vente 15 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 19)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 44
- dépôt 6 :
  le point de vente 7 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 0)
  le point de vente 13 se reporte (au minimum) sur le dépôt 7 (surcoût 13)
  le point de vente 19 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 6)
  le point de vente 20 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 5)
  ⟶ surcoût total (au minimum) de 24
- dépôt 7 :
  le point de vente 14 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 8)

⟶ surcoût total (au minimum) de 8

On peut cette fois-ci sélectionner le dépôt 4 (regret minimal de 44 pour un coût fixe de 42), qui alimente donc les dépôts 1, 3 et 15.

6.4 Seconde phase d'élimination

La procédure de sélection précédente a été fructueuse : on peut donc refaire une phase d'élimination pour les dépôts 2, 3, 6 et 7. Cette fois-ci, on peut se reporter sur les dépôts 4 ou 5 (que l'on sait ouverts). On obtient les résultats suivants :

- dépôt 2 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 5 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 31)
  le point de vente 9 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 10 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 12)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 10)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 1)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 ou du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 2
  ⟶ surcoût total (au pire) de 68
- dépôt 3 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 4)
  le point de vente 7 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 3)
  le point de vente 8 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 31)
  le point de vente 14 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 2)
  le point de vente 16 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 12)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 ou du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 3
  ⟶ surcoût total (au pire) de 56
- dépôt 6 :
  le point de vente 7 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 4)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 20)
  le point de vente 19 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 6)
  le point de vente 20 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 5)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 ou du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 6
  ⟶ surcoût total (au pire) de 35
- dépôt 7 :
  le point de vente 2 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 0)
  le point de vente 11 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 25)
  le point de vente 13 se reporte (au pire) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 14 se reporte (au pire) sur le dépôt 5 (surcoût 10)
  les autres points de vente sont approvisionnés à coût moindre à partir du dépôt 4 ou du dépôt 5 qu'à partir du dépôt 7
  ⟶ surcoût total (au pire) de 42

On peut cette fois éliminer le dépôt 6, car son regret est au maximum de 35 pour un coût fixe de 40. Cette élimination permet en outre de conclure que les points de vente 19 et 20 sont alimentés par le dépôt 5 qui est ouvert et qui est le moins cher pour ces deux points de vente.

6.5 Faisons le point…

Résumons ce que nous savons des phases précédentes :

- le dépôt 4 est ouvert et alimente les points de vente 1, 3 et 15 ;
- le dépôt 5 est ouvert et alimente les points de vente 4, 6, 12, 17, 18, 19 et 20 ;

– les dépôts 1, 6 et 8 sont fermés.

On peut alors réduire le tableau de données en supprimant les colonnes des dépôts fermés ainsi que les lignes des points de vente pour lesquels on connaît le dépôt d'approvisionnement. Pour chaque point de vente, on peut également supprimer les coûts des dépôts supérieurs au minimum du coût parmi des dépôts ouverts (pour ce point de vente) car on sait que ces dépôts ne seront pas utilisés pour ces points de vente. On obtient le tableau 3, sachant toujours que les dépôts 4 et 5 sont ouverts.

	Dépôts possibles				
Points de vente	2	3	4	5	7
2	13	16	20	..	..
5	105	...	136	...	...
7	..	29	33	..	..
8	..	45	..	49	..
9	81	..	88	...	...
10	23	..	..	35	..
11	120	99	130	...	105
13	..	...	96	...	89
14	..	47	..	49	39
16	27	16	28	..	..
Coût fixe	63	39	42	44	41

TAB. 3 – Tableau réduit : 5 dépôts, 10 points de vente

6.6 Nouvelle phase de sélection

La précédente phase d'élimination ayant été fructueuse, on peut tenter une nouvelle phase de sélection. On ne teste bien sûr que les trois dépôts encore indéterminés, à savoir 2, 3 et 7. On obtient les résultats suivants :

– dépôt 2 :
  le point de vente 2 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 3)
  le point de vente 5 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 31)
  le point de vente 9 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 10 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 12)
  $\longrightarrow$ surcoût total (au minimum) de 53
– dépôt 3 :
  le point de vente 7 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 4)
  le point de vente 8 se reporte (au minimum) sur le dépôt 5 (surcoût 4)
  le point de vente 11 se reporte (au minimum) sur le dépôt 7 (surcoût 6)
  le point de vente 16 se reporte (au minimum) sur le dépôt 2 (surcoût 11)
  $\longrightarrow$ surcoût total (au minimum) de 25
– dépôt 7 :
  le point de vente 13 se reporte (au minimum) sur le dépôt 4 (surcoût 7)
  le point de vente 14 se reporte (au minimum) sur le dépôt 3 (surcoût 8)
  $\longrightarrow$ surcoût total (au minimum) de 15

Ces minorants de regret étant tous inférieurs aux coûts fixes correspondants, on ne peut rien conclure. . .et il n'est donc pas la peine d'essayer une nouvelle phase d'élimination qui redonnera les mêmes résultats que la précédente. On peut toutefois constater que le problème a été bien réduit par rapport au problème initial !

6.7 Méthode SEP

On peut maintenant lancer une méthode SEP classique pour les 3 dépôts encore indéterminés (2, 3 et 7) : on utilise le même principe pour le choix de la variable de séparation (écart relatif du regret par rapport au coût fixe).

6.7.1 SEP : première étape

À partir de la solution initiale précédemment calculée (solution partielle de borne 1089), on choisit donc comme variable de séparation x_2 (car $\frac{10}{63} < \frac{14}{39} < \frac{26}{41}$).

On « sépare » donc cette solution en deux nouvelles solutions :

- la première correspond à l'ouverture du dépôt 2 ; on sait alors que les points de vente 2, 5, 9 et 10 sont alimentés par ce dépôt ;
  une phase d'élimination permet de conclure à la fermeture du dépôt 7 : au pire, le point de vente 11 se reporte sur 2 (+15), le point de vente 13 se reporte sur 4 (+7), le point de vente 14 se reporte sur 5 (+10), soit un surcoût total maximal de 32 inférieur au coût fixe de 41 ;
  une phase de sélection permet de conclure à l'ouverture du dépôt 3 : au minimum, le point de vente 7 se reporte sur le dépôt 4 (+4), le point de vente 8 se reporte sur le dépôt 5 (+4), le point de vente 11 se reporte sur le dépôt 2 (+21), le point de vente 14 se reporte sur le dépôt 5 (+2), le point de vente 16 se reporte sur le dépôt 2 (+11), soit un surcoût total minimal de 42 supérieur au coût fixe de 39 ;
  on obtient donc une solution complète de coût 1206 ;
- la seconde correspond à la fermeture du dépôt 2 ; ceci permet de conclure que les points de vente 5 et 9 sont alimentés par le dépôt 4 (c'est le moins cher et il est ouvert), le point de vente 10 étant alimenté par le dépôt 5 ; une phase de sélection (que l'on peut tenter car un dépôt a été fermé) donne comme regret minimal pour le dépôt 3 la valeur de 30 (inférieure au coût fixe de 39), et pour le dépôt 7 la valeur de 15 (inférieur au coût fixe de 41) : on ne peut donc pas conclure, si ce n'est que la prochaine variable de séparation sera x_3 ;
  la borne calculée pour cette solution est de 1142, inférieure à la meilleure solution connue, donc on va effectuer une nouvelle phase de séparation.

6.7.2 SEP : deuxième étape

On prend la solution de borne minimale (1142) et comme il reste des variables indéterminées (x_3 et x_7), on effectue une phase de séparation selon la variable x_3, c'est-à-dire l'ouverture ou la fermeture du dépôt 3.

- pour la solution correspondant à l'ouverture du dépôt 3, on constate que le dépôt 3 va alimenter les points de vente 2, 7, 8, 11 et 16 ;
  une nouvelle phase d'élimination (justifiée, car on vient d'ouvrir un nouveau dépôt) permet de conclure à la fermeture du dépôt 7 : au pire, le point de vente 13 se reporte sur le dépôt 4 (+7) et le point de vente 14 se reporte sur le dépôt 3 (+8), soit un surcoût total maximal de 15, inférieur au coût fixe de 41 ;
  on obtient ainsi une nouvelle solution complète de coût 1196, donc meilleure que la précédente (1206) !
- pour la solution correspondant à la fermeture du dépôt 3, on conclut que les points de vente 2, 7 et 16 sont alimentés par le dépôt 4, le point de vente 8 étant alimenté par le dépôt 5 ;
  une nouvelle phase de sélection (on vient de décider une nouvelle fermeture de dépôt) permet de conclure à l'ouverture du dépôt 7 : au minimum, le point de vente 11 se reporte sur 4 (+25), le point de vente 13 se reporte sur 4 (+7), le point de vente 14 se reporte sur 5 (+10), soit un surcoût minimal de 42, supérieur au coût fixe de 41 ;
  on obtient ainsi une nouvelle solution complète de coût 1213 supérieur à la meilleure solution connue, et qui est donc éliminée.

On termine donc la recherche SEP par la conclusion : la solution optimale consiste à ouvrir les dépôts 3, 4 et 5 pour un coût global de 1196. Les points de vente sont approvisionnés comme suit :

- le dépôt 3 alimente 2, 7, 8, 11, 14 et 16 ;
- le dépôt 4 alimente 1, 3, 5, 9, 13 et 15 ;
- le dépôt 5 alimente 4, 6, 10, 12, 17, 18, 19 et 20.

6.7.3 SEP : en guise de conclusion

La recherche SEP avec procédure de sélection et élimination a priori, ainsi que le choix de la variable de séparation, conduit à une exploration très simple : deux étapes suffisent pour aboutir aux 3 solutions complètes testées ! Ceci est à mettre en rapport avec les $2^8 = 256$ solutions testables dans la méthode de force brute.